# ***Практическая работа №3***

# **Решение систем уравнений по формулам Крамера**

# Цели работы:

# В результате изучения этой темы Вы должны уметь:

# - выполнять примеры №1.

# Для овладения навыками решения задач Вам необходимо усвоить следующие во-просы:

# **Введение**

Определители впервые были введены для решения системы уравнений первой степени. В 1750 году швейцарский математик Г. Крамер дал общие формулы, выражающие неизвестные через Определители, составленные из коэффициентов системы. Примерно через сто лет теория определителей, выйдя далеко за пределы алгебры, стала применяться во всех математических науках.

**Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера**

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы.

Свойства определителей состоят в следующем :

1. Величина определителя не изменится при его транспонировании (перемене мест строк и столбцов).

2. Знак определителя изменится на противоположный, если поменять местами два его параллельных ряда.

3. Определитель, два параллельных ряда которого совпадает, равен нулю.

4. Определитель равен сумме произведений элементов любого ряда определителя на их алгебраические дополнения.

5. Общий множитель, содержащийся во всех элементах одного ряда, можно вынести за знак определителя.

6. Если определитель имеет ряд, составленный из нулей, то Д =0.

7. Если элементы какого- либо ряда определителя можно представить в виде суммы, то Д также можно представить в виде суммы определителей.

8. Сумма произведений элементов какого- либо ряда определителя на алгебраические дополнения, отвечающие элементам другого параллельного ряда, равна нулю.

9. Величина определителя не изменится, если к элементам любого ряда прибавить элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.

Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе D последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов

Таким образом, заметим, что если определитель системы Д = 0, то система имеет единственное решение и обратно. Если же определитель системы равен нулю, то система либо имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений, т.е. несовместна.

# **Определители и их свойства. Определители 2-го, 3-го и n-го порядков**

Пусть *A* = (*aij*)   (*i*, *j* = 1, …, *n*) — квадратная матрица порядка *n*. ***Определителем*** (или ***детерминантом***) матрицы *A* называется число, которое ставится в соответствие этой матрице и может быть вычислено по ее элементам. Обозначается определитель матрицы *A* символами

Определитель матрицы *n*×*n* называется ***определителем n–го порядка*.**

**Правило вычисления определителей**

1. Определителем матрицы 1×1, состоящей из одного числа, будем считать само это число.

2. Определитель матрицы 2×2 вычисляется по формуле

3. Определитель матрицы 3×3 вычисляется по формуле

Аналогично мы будем вычислять определитель матрицы *n*×*n* (определитель *n*–го порядка), сводя его к определителям *n*−1–го порядка, определители *n*−1–го порядка к определителям *n*−2–го порядка и т.д.

Чтобы сформулировать общее правило вычисления определителя, введем понятия дополнительного минора и алгебраического дополнения элемента матрицы:

***Дополнительным минором Mij*** элемента матрицы *n*–го порядка *aij*  (*i*, *j* = 1, …, *n*) называется определитель матрицы *n*−1–го порядка, полученной из матрицы *A* вычеркиванием *i*–ой строки и *j*–го столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

***Алгебраическим дополнением Aij*** элемента матрицы *n*–го порядка *aij*   (*i*, *j* = 1, …, *n*) называется число (−1)*i* + *jMij*, где *Mij* — дополнительный минор.

***Определителем*** (или ***детерминантом***) матрицы *A* называется число, которое вычисляется по формуле

|  |
| --- |
|  |

Эта формула называется ***разложением определителя по первой строке*.**

Определитель квадратной матрицы *A* = (*aij*) порядка *n* может быть вычислен по любой из формул:

|  |
| --- |
|  |

— разложение по *i*–ой строке, или

|  |
| --- |
|  |

— разложение по *j*–ому столбцу.

**Свойства определителей**

1. При транспонировании матрицы величина ее определителя не меняется, т.е.

Отсюда следует, что любое утверждение, справедливое для столбцов определителя, справедливо также и для строк.

2. При перестановке двух столбцов (или строк) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

3. Если матрица имеет два одинаковых столбца (или две одинаковые строки), то ее определитель равен нулю.

4. Если все элементы какого–нибудь столбца (или строки) матрицы умножить на одно и то же число, то ее определитель умножится на это число.

5. Если матрица содержит столбец (строку), состоящую из нулей, то ее определитель равен нулю.

6. Если элементы какого–нибудь столбца (строки) матрицы представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель этой матрицы можно представить в виде суммы двух определителей, а именно:

7. Если соответствующие элементы двух столбцов (строк) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

8. Если к элементам какого–нибудь столбца (строки) матрицы прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число, то величина определителя не изменится.

9. Сумма произведений элементов любого столбца (строки) матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю.

**Примеры с решением по теме: «Определители и их свойства. Определители 2-го, 3-го и n-го порядков»**

Пример 1. Дана квадратная матрица 3–го порядка

Найдем алгебраические дополнения к элементам первой строки:

Вычислим определитель матрицы, разлагая его по первой строке:

Пример 2. Не вычисляя определителя, докажем равенство

Эти определители имеют одинаковые 1–й и 2–й столбцы, а 3–й столбец определителя в правой части равенства можно получить, если у определителя в левой части равенства к 3–ему столбцу прибавить первый столбец, умноженный на 2, т.е.

Но по свойству 8 величина определителя при этом не меняется, что и требовалось доказать.

**Пример решения системы уравнений с помощью определителя, применяя формулы Крамера**

 8Х1-2Х2-4X3=400

 -3Х1+4Х2-3X3=150

 -4X1-X2+8X3=100

Решим систему с помощью определителя. 

ΔХ1 = 400 -2 -4 400(4\*8-(-1)\*(-3))-(-2)\*(150\*8-100\*(-3))-4\*(150\*(-1)-100\*

 150 4 -3 =\*4)=400\*(32-3)+2\*(1200+300)-4\*(-150-400)=11600+3000+

 100 -1 8 2200=16800

ΔХ2= 8·400 -4 8\*(150\*8-100\*(-3))-400\*((-3)\*8-(-4)\*(-3))-4\*((-3)\*100-(-4)\*

 -3•150 -3 = \*150)= 8\*(1200+300)-400\*(-24-12)-4\*(-300+600)= 12000+

 -4 100 8 +14400-1200=25200

ΔХ3= 8 -2 400 8\*(4\*100-(-1)\*150)-2\*((-3)\*100-(-4)\*150)-400\*((-3)\*(-1)-(-4)\*

 -3 4 150 = \*4=8\*(400+150)-2\*(-300+600)-400\*(3+16)= 4400+600+7600=

 -4 -1 100 = 12600

Х1= ΔХ1/Δ= 16800/84=200

Х2= ΔХ2/Δ=25200/84=300

Х3= ΔХ3/Δ=12600/84=150

Проверка:

 8\*200-2\*300-4\*150=400

 -3\*200+4\*300-3\*150=150

 -4\*200-300+8\*150=100

 1600-600-600=400

 -600-1200-450=150

 -800-300+1200=100

 400=400

 150=150

 100=100

Ответ:X1=200 X2= 300 X3= 150

**Вопросы и упражнения для самопроверки**

1. Что такое определитель?
2. Что будет считаться определителем матрицы 1×1?
3. Что называется дополнительным минором?
4. Что называется алгебраическим дополнением?
5. Что происходит с величиной определителя при транспонировании матрицы?
6. Что такое матрица?
7. Какая матрица называется квадратной?
8. Какая матрица называется единичной?
9. При каких условиях матрица может иметь обратную матрицу?
10. Что такое обратная матрица?
11. Дана квадратная матрица 3-го порядка

Вычислите ее определитель.

Ответ: 2384